

"Stochastic modelling and derivatives in traditional markets and in crypto-markets"

DU Financial Engineering

SU (Sorbonne Université) - X (Ecole polytechnique)

Emmanuel Gobet (cours et TD)

SEMAINE 1

1	Introduction à la gestion des risques	3
1.1	Des éléments d'histoire des produits dérivés (contrats financiers) .	3
1.2	Produit dérivé	5
2	Valorisation sans modèle	10
2.1	Absence d'opportunité d'arbitrage (AOA)	10
2.2	Prix comptant, prix forward, prix Future	11
2.3	Propriétés des calls (indépendantes du modèle)	12
2.4	Options européennes et réplication (sans modèle) par des calls/puts	13

1 Introduction à la gestion des risques

1.1 Des éléments d'histoire des produits dérivés (contrats financiers)

Jusqu'à la fin des années 60, essentiellement **produits dérivés sur matières premières et agricoles** :

- Au **XIV^e siècle av. JC** (en Egypte) : achat et vente à terme de blés.
- Au **VII^e siècle av. JC** : Thalès premier "grand spéculateur" en anticipant sur les récoltes abondantes d'olive.
- Les **Romains** finançaient les grands travaux par la vente d'obligations (*dette souveraine*).
- Au **XVII^e siècle** en Hollande : commerce actif de bulbes de tulipe.
Contrats garantissant le prix de vente des tulipes au printemps suivant.
- Au **XVII^e siècle**, marchés à terme sur le riz au Japon, ou sur le blé et le bétail aux USA dès le **XIX^e siècle**.

BOULEVERSEMENT DES ANNÉES 70

- ➡ Déséquilibres macro-économiques (parité or et \$ US, stabilité des changes)
- ➡ Grandes variations des taux d'intérêt et taux de change entre devises
- ➡ Risques accrus pour les entreprises

1973. Création des marchés d'options à Chicago en 1973, contrats à terme sur taux d'intérêt en 1977, Londres (LIFFE) en 1982, Paris (MATIF) en 1986...

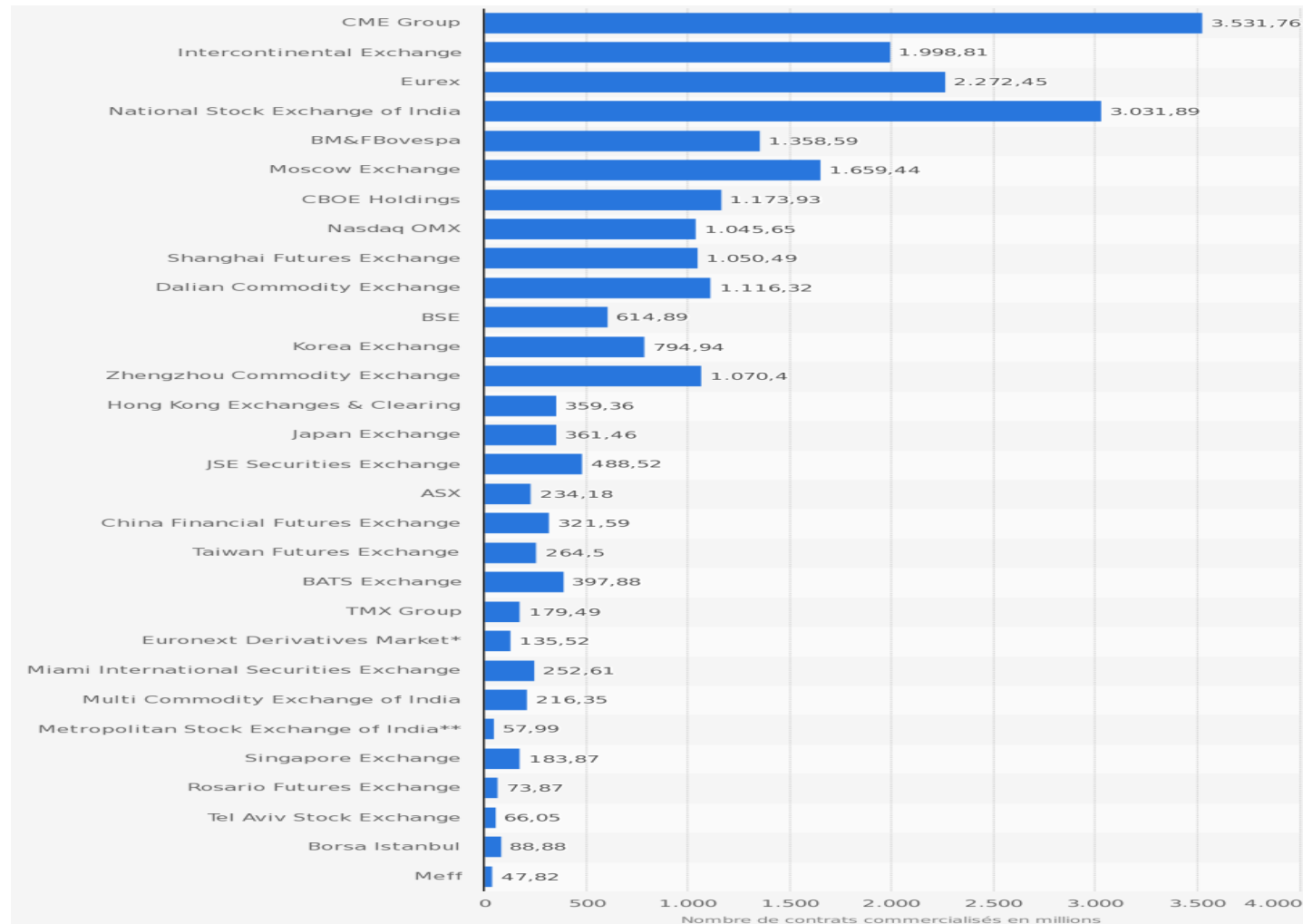
1.2 Produit dérivé

Définition. Un *produit dérivé* est un *produit financier*, défini à partir d'un autre produit financier plus simple appelé *sous-jacent* (une action, un indice, une devise, une matière première, un taux d'intérêt ...).

- **Contrat à terme** : acheteur et vendeur s'entendent pour échanger à une date fixée un sous-jacent à un prix fixé (payé dans le futur).
 - Exemples : *forwards*, *futures*, *swaps*.
 - **Risques symétriques.**
 -  Risque de contrepartie (si échange de gré à gré).
- **Contrat optionnel** ou **option** : assurance contre les mouvements défavorables du sous-jacent (prime payée à la signature du contrat).
 - **Risques dissymétriques.**
 - Options classiques dites *vanilles* (Call/Put), cotées sur marchés listés.
 - Options exotiques et structurées : flux "path-dependent". **Marchés de gré à gré (OTC=Over The Counter).**

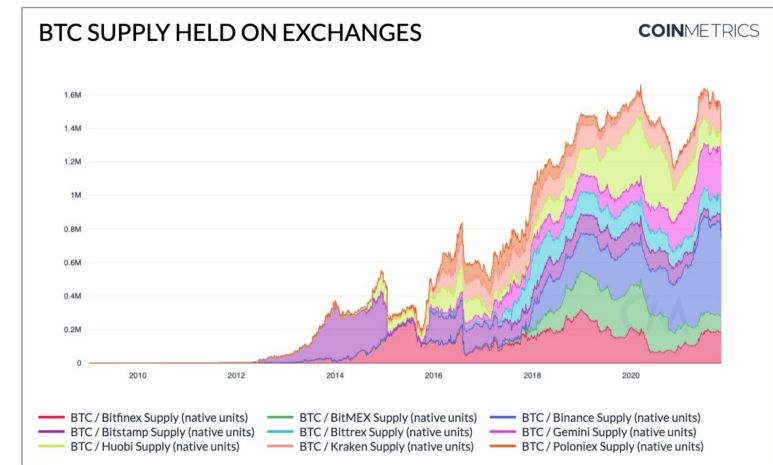
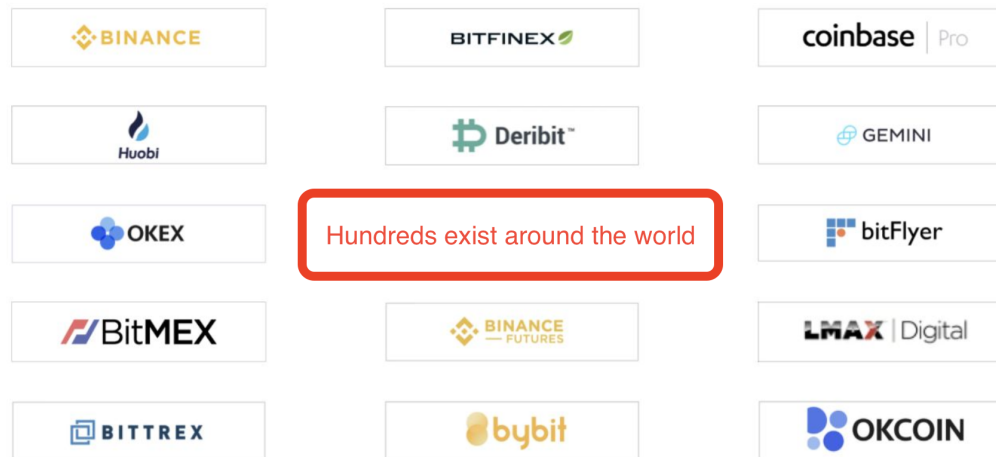
— **Finance traditionnelle** : quelques bourses seulement

Main exchanges for derivatives in the work in 2015, in terms of number of contracts (in millions) - SOURCE : Futures Industry Association



— Finance digitale/crypto : marché fragmenté

— Centralized Exchanges



— Decentralized Exchanges (Blockchain) :

# Trades	Exchange	# Pools	%	# Mints	# Burns
960924	curv	344	0,16%	566152	421482
1398792	blc2	1275	0,59%	93864	44279
471382	crv2	18	0,01%	18261	11276
114814668	usp2	195403	90,03%	3924111	1740615
11976425	sush	3684	1,70%	531695	308206
32452350	usp3	13037	6,01%	1108823	1242071
2787827	blcr	3291	1,52%	305293	200417

Number of trades and liquidity pools, by decentralized exchange, on Ethereum

— About 1700 cryptocurrencies traded on a daily basis

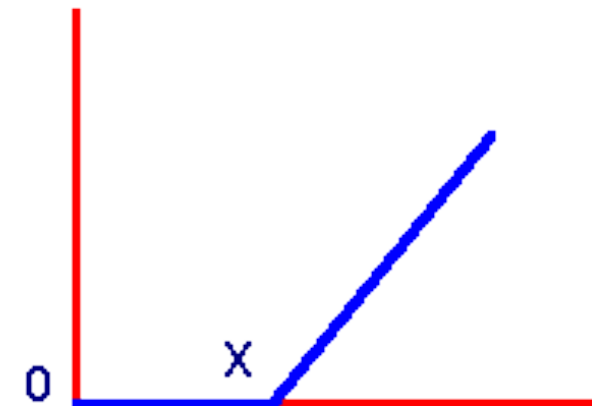
Un exemple : option d'achat (*Call*). Air France-KLM a des recettes en € et des dépenses en \$, et un bilan en € .

❓ Comment **se protéger contre** l'appréciation du Dollar par rapport à l'Euro au 31 décembre 2013 ?

➡ La banque lui vend une **assurance** = **option d'acheter un \$ à $K = 0.75$ € , à exercer à $T=31/12/2013$** . Que se passe t'il au 31/12/2013 ?

1. Si Dollar/Euro < 0.75 , pas d'intérêt à exercer l'option (elle vaut zéro).
2. Sinon, exercice et équivalent d'un gain Dollar/Euro $- K$.

En résumé, si X =taux de change Dollar→Euro, option donne un gain $\max(X_T - K, 0)$.



► Quel est le coût (la **prime**) de cette assurance ?

► AF-KLM transfère le risque vers la banque. **Comment gérer ce risque ?**

⚠ A la différence des assurances, pas de diversification sur les nombreux assurés.

CALL/PUT SUR CAC40 ÉCHÉANCE 20 JUIN 2014

Cotation du 2 octobre 2013 : CAC40 = 4155.

- i) OTM = Out-The-Money
- ii) ATM = At-The-Money
- iii) ITM = In-The-Money

Strike	3500	3700	3800	3900	3950	4000	4050
	Call ITM	Call ITM	Call ITM	Call ITM	Call ITM	Call ITM	Call ITM
Dernier cours	621,68	466,8	394,99	328,19	296,73	266,93	241,23
Dernier cours	87,72	132,45	160,45	193,45	211,9	232	256,2
	Put OTM	Put OTM	Put OTM	Put OTM	Put OTM	Put OTM	Put OTM

Strike	4100	4150	4200
	Call ATM	Call ATM	Call ATM
Dernier cours	214,35	188,95	166,2
Dernier cours	279,22	303,73	330,88
	Put ATM	Put ATM	Put ATM

Strike	4250	4300	4350	4400	4500	4600	4800
	Call OTM	Call OTM	Call OTM	Call OTM	Call OTM	Call OTM	Call OTM
Dernier cours	145,25	126,05	108,55	92,85	66,4	46,15	21
Dernier cours	359,83	390,53	422,94	457,14	530,5	610,05	784,51
	Put ITM	Put ITM	Put ITM	Put ITM	Put ITM	Put ITM	Put ITM

DONNÉES EUREX : OPTIONS SUR EURO STOXX 50 (INDICE À 3400 LE 24/09/2018)

EURO STOXX 50® Index Options (OESX)

Product ISIN **DE0009652396** Currency **EUR**
Underlying ISIN **EU0009658145**

Latest

Prices/Quotes

☒ Call ☐ Put **Oct 2018**

Displayed data is 15 minutes delayed. Last trade: **Sep 24, 2018 4:25:30 PM**

Strike price	Vers. num.	Opening price	High	Low	Bid price	Bid vol	Ask price	Ask vol	Diff. to prev. day last	Last price	Date	Time	Daily settlem. price	Traded contracts
3,700.00	0	n.a.	n.a.	n.a.	0.10	3,969	0.30	3,126	-33.33%	0.20	09/21/2018	18:16:02	0.20	1,155
3,675.00	0	n.a.	n.a.	n.a.	0.20	289	0.30	1,000	-25.00%	0.30	09/21/2018	18:16:02	0.30	2,663
3,650.00	0	0.40	0.40	n.a.	0.20	4,297	0.40	2,188	-20.00%	0.40	09/24/2018	16:23:23	0.40	1,603
3,625.00	0	0.50	0.60	0.50	0.40	731	0.50	665	-28.57%	0.50	09/24/2018	16:23:18	0.70	60
3,600.00	0	1.00	1.00	0.80	0.60	350	0.80	3,389	-27.27%	0.80	09/24/2018	16:23:13	1.10	529
3,575.00	0	1.50	1.60	1.10	1.00	1,865	1.20	2,341	-31.58%	1.30	09/24/2018	16:23:08	1.90	1,069
3,550.00	0	2.70	2.70	1.90	1.80	1,400	2.10	3,053	-38.24%	2.10	09/24/2018	16:13:44	3.40	2,796
3,525.00	0	5.10	5.20	3.50	3.50	245	3.70	1	-37.10%	3.90	09/24/2018	16:18:37	6.20	5,086
3,500.00	0	9.00	9.20	6.60	6.60	632	6.90	300	-33.33%	7.20	09/24/2018	16:23:43	10.80	5,127
3,475.00	0	15.50	15.50	11.80	11.80	281	12.20	301	-27.37%	13.00	09/24/2018	15:53:21	17.90	5,875
3,450.00	0	24.70	24.70	19.00	19.50	689	20.10	366	-25.81%	20.70	09/24/2018	16:21:03	27.90	3,856
3,425.00	0	36.00	36.50	29.50	30.20	458	30.90	212	-23.59%	31.10	09/24/2018	16:25:30	40.70	1,791
3,400.00	0	50.10	50.10	43.70	43.60	476	44.50	212	-14.97%	47.70	09/24/2018	15:47:17	56.10	648
3,375.00	0	65.00	65.80	65.00	59.30	150	61.10	252	-11.80%	65.00	09/24/2018	11:00:13	73.70	6
3,350.00	0	78.40	78.40	78.40	76.20	150	79.40	150	+26.53%	93.00	09/24/2018	15:40:12	93.00	1,168
3,325.00	0	102.70	102.70	102.70	95.50	150	99.50	150	-9.67%	102.70	09/24/2018	11:20:04	113.70	3
3,300.00	0	125.10	125.10	125.10	116.20	150	121.00	150	-7.61%	125.10	09/24/2018	10:41:05	135.40	1
3,275.00	0	n.a.	n.a.	n.a.	137.90	150	143.20	150	+17.57%	157.90	09/21/2018	18:16:02	157.90	7
3,250.00	0	n.a.	n.a.	n.a.	160.50	150	166.10	150	+15.57%	181.10	09/21/2018	18:16:02	181.10	0
3,225.00	0	n.a.	n.a.	n.a.	183.60	150	189.50	150	+13.97%	204.80	09/21/2018	18:16:02	204.80	7
3,200.00	0	n.a.	n.a.	n.a.	207.20	150	213.30	150	+12.54%	228.80	09/21/2018	18:16:02	228.80	0
3,175.00	0	n.a.	n.a.	n.a.	231.20	150	237.40	150	+11.40%	253.10	09/21/2018	18:16:02	253.10	0
3,150.00	0	n.a.	n.a.	n.a.	255.50	150	261.80	150	+10.47%	277.60	09/21/2018	18:16:02	277.60	3
3,125.00	0	n.a.	n.a.	n.a.	279.90	150	286.30	150	+9.61%	302.20	09/21/2018	18:16:02	302.20	0
3,100.00	0	n.a.	n.a.	n.a.	304.50	150	310.90	150	+8.86%	326.80	09/21/2018	18:16:02	326.80	0

Limit Order Book :

Bid size	Price	Ask size
	10.15	20
	10.10	50
	10.05	100
	10.00	150
	9.95	150
	9.90	200
350	9.85	
220	9.80	
200	9.75	
180	9.70	
155	9.65	
95	9.60	



2 Valorisation sans modèle

2.1 Absence d'opportunité d'arbitrage (AOA)

Définition (marché sans friction : marché idéalisé).

- pas de coûts de transaction
- pas d'impôts ou taxes (sur transactions et plus values)
- prix bid = prix ask : spread nul (largeur de fourchette nulle)
- transaction instantanée
- titres négociables très liquides, indéfiniment fractionnables
- pas de restriction sur les ventes à découvert
- les participants du marché n'ont pas d'impact sur les prix (= petits investisseurs).

Hypothèse : dans un marché sans friction, il y a Absence d'Opportunité d'Arbitrage, càd il est impossible de gagner de l'argent de façon certaine^a à partir d'un investissement nul (**No Free Lunch**)



Différent de l'arbitrage statistique

Corollaire (Unicité des prix). En AOA, si deux portefeuilles coïncident de façon certaine à une date donnée, alors ces portefeuilles ont des valeurs identiques à toute date intermédiaire.

a. dans n'importe quel scénario futur de marché

2.2 Prix comptant, prix forward, prix Future

Définition (prix comptant/forward/Future du flux Ψ_T en T).

- i) prix comptant $C_t(\Psi_T, T)$: prix payé en t pour recevoir le flux Ψ_T en T
- ii) prix forward $F_t(\Psi_T, T)$: prix négocié en t mais payé en T , pour recevoir le flux en T
- iii) prix future $\text{Fut}_t(\Psi_T, T)$: prix négocié en t pour recevoir le flux en T , avec règlement des ajustements de prix (appels de marge) "en continu" (tous les jours) via un tiers (*exchange*) entre l'acheteur et le vendeur du contrat.

Proposition (relation prix comptant / prix forward). Pour tout flux Ψ_T ,

$$F_t(\Psi_T, T) = \frac{C_t(\Psi_T, T)}{B(t, T)}$$

où $B(t, T)$ est le prix à la date t d'une obligation zéro-coupon de maturité T : c'est à dire, le prix comptant pour le flux unitaire $\Psi_T = 1$.

► En particulier : si un titre négociable S ne verse pas de dividende et n'a pas de coût de stockage, alors $C_t(S_T, T) = S_t$ et par conséquent $F_t(S_T, T) = \frac{S_t}{B(t, T)}$.

Proposition (relation de parité). Si $\text{Call}_t(T, K)$ et $\text{Put}_t(T, K)$ sont les prix comptants de Calls/Puts pour $T \geq t$ et $K \geq 0$, alors

$$\text{Call}_t(T, K) - \text{Put}_t(T, K) = B(t, T)(F_t(S_T, T) - K).$$

2.3 Propriétés des calls (indépendantes du modèle)

Proposition (conditions d'arbitrage statique). Pour tout t fixé,

1. $(C_t(S_T, T) - KB(t, T))_+ \leq \text{Call}_t(T, K) \leq C_t(S_T, T)$
2. La fct $K \mapsto \text{Call}_t(T, K)$ est décroissante (relation de Bull Spread)
3. La fct $K \mapsto \text{Call}_t(T, K)$ est convexe (relation de Butterfly Spread)
4. Si le sous-jacent ne verse pas de dividende et $B(t, T) \leq 1$, alors la fct

$$T \mapsto \text{Call}_t(T, K)$$

est croissante (relation de Calendar Spread).

2.4 Options européennes et réplcation (sans modèle) par des calls/puts

Théorème (formule de Carr). Les calls/puts forment un système d'options générant les prix d'options européennes de la forme $h(S_T)$ avec des payoffs h réguliers : si h est une fonction de classe C^2 sur un intervalle $I = (a, b)$ avec $-\infty \leq a < b \leq \infty$, alors $\forall x_0 \in I$,

$$C_t(h(S_T), T) = h(x_0)B(t, T) + h'(x_0)(C_t(S_T, T) - x_0B(t, T)) \\ + \int_{x_0}^b h''(k)\text{Call}_t(T, k)dk + \int_a^{x_0} h''(k)\text{Put}_t(T, k)dk.$$

Remarques.

- Réplication statique du payoff $h(S_T)$ avec un "continuum" de calls/puts.
- Pricing sans modèle, cohérent avec les données de marché de calls/puts.
- En pratique, discrétisation sur la grille de call/puts disponibles.

- en prenant $x_0 = F_t(S_T, T) \Rightarrow$ formule plus condensée

$$C_t(h(S_T), T) = h(F_t(S_T, T))B(t, T) + \int_{F_t(S_T, T)}^b h''(k) \text{Call}_t(T, k) dk + \int_a^{F_t(S_T, T)} h''(k) \text{Put}_t(T, k) dk.$$

- Ne permet pas d'attraper des flux path-dependent ("exotiques", type option barrière, option américaine...)
- ... ni des vanilles digitales (formules de Breeden-Litzenberger)

$$C_t(\mathbf{1}_{S_T \geq K}, T) = -\partial_K^- \text{Call}_t(T, K), \quad C_t(\mathbf{1}_{S_T > K}, T) = -\partial_K^+ \text{Call}_t(T, K).$$

Exemples (de la formule de Carr, cf TD). Pricer par réplication statique (à l'aide de calls/puts standards)

- un log-contrat de payoff $h(S_T) = \ln(S_T/S_0)$ (lié aux variance swaps dans les modèles d'Itô).
- une power option de payoff $h(S_T) = (S_T)^p$ (pour $p > 0$).

Application of Carr formula : The realized variance formula by STOXX

9.2.3. CALCULATION OF VSTOXX SUB-INDICES

Each of the eight VSTOXX sub-indices is calculated according to the formula shown below:

$$\text{SubIndex}_i = 100 \cdot \sqrt{\sigma_i^2}$$

where:

i = i^{th} sub-index ($i = 1, \dots, 8$).

σ_i^2 = Implied variance for the the i^{th} OESX expiry date:

$$\sigma_i^2 = \frac{2}{T_i/T_{365}} \cdot \sum_j \frac{\Delta K_{i,j}}{K_{i,j}^2} \cdot R_i \cdot M_{K_{i,j}} - \frac{1}{T_i/T_{365}} \cdot \left(\frac{F_i}{K_{i,0}} - 1 \right)^2$$

T_i = Seconds to the i^{th} OESX expiry date.

F_i = Forward at-the-money price for the i^{th} OESX expiry date, derived from exercise price for which the absolute difference between call and put prices is smallest. If multiple pairs of calls and puts exist with identical price differences, a forward price will be calculated as the simple average of the corresponding implied forward prices:

$$F_i = K_{\min|C-P|} + R_i \cdot (C-P)$$

$K_{i,0}$ = Highest exercise price not exceeding F_i .

$K_{i,j}$ = Exercise price of the j^{th} out-of-the-money option, after sorting the options by their exercise prices in ascending order (i.e. call options for exercise prices above $K_{i,0}$, put options otherwise).

$\Delta K_{i,j}$ = Average distance between the exercise prices of the two options struck respectively immediately above and immediately below $K_{i,j}$. On the boundaries, the simple distance between the highest (lowest) and second-highest (lowest) exercise price for call (put) options is used:

$$\Delta K_{i,j} = \frac{1}{2} \cdot (K_{i,j+1} - K_{i,j-1})$$

$M_{K_{i,j}}$ = Inclusion price of the out-of-the-money option with exercise price $K_{i,j}$.

$M_{K_{i,0}}$ = Simple arithmetic average of put and call prices of the option with exercise price $K_{i,0}$.